## 5.2.3 Kolmost přímek a rovin I

**Předpoklady:** 5202

**Př. 1:** Vysvětli, proč máme speciální hodiny, které se zabývají kolmostí.

Na počátku kapitoly jsme si říkali, že stereometrické definice vycházejí kvůli jednoznačnosti z rovnoběžnosti nebo z kolmosti $\Rightarrow$ musíme si proto ujasnit, jak se určuje kolmost, abychom ji mohli v definicích používat.

**Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je $90°$.**
$\Rightarrow$
- Navzájem kolmé mohou být i mimoběžky.
- Dvě úsečky jsou kolmé, právě když leží na kolmých přímkách.

Píšeme:
- přímky: $p \perp q$, $\leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow CD$,
- úsečky: $AB \perp CD$.

**Př. 2:** Doplň vztahy mezi přímkami *p*, *q*, *r* v prostoru.
a) Je-li $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak … b) Je-li $p \parallel q$ a $q \perp r$, pak …

a) Je-li $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak $p \perp r$.
b) Je-li $p \parallel q$ a $q \perp r$, pak $p \perp r$.

**Př. 3:** Rozhodni, zda pro přímky *p*, *q*, *r* v prostoru platí věty:
a) Je-li $p \parallel r$ a $q \perp r$, pak $p \perp q$. b) Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \parallel r$.
Pokud věta neplatí, najdi protipříklad na přímkách určených vrcholy standardní krychle.

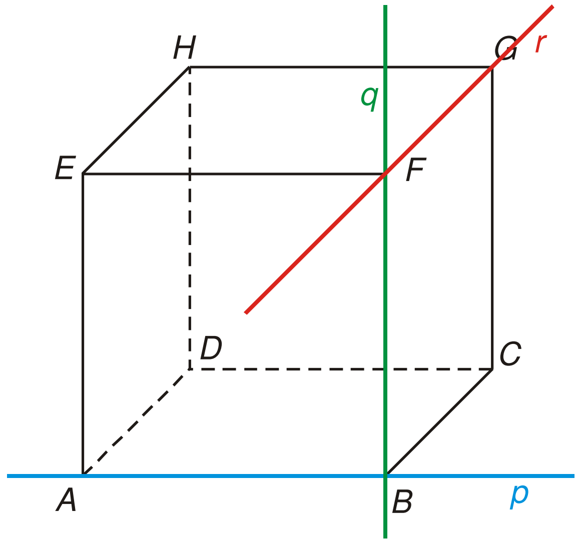
a) Je-li $p \parallel r$ a $q \perp r$, pak $p \perp q$.
Věta platí, jde o stejné tvrzení jako v bodě 1 a), pouze s prohozeným významem přímek *r* a *q*.

b) Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \parallel r$.

Věta obecně neplatí, například ve standardní krychli pro přímky:

- $p = \leftrightarrow AB$
- $q = \leftrightarrow BF$
- $r = \leftrightarrow FG$

Odchylka mezi přímkou $p$ a $r$ může být libovolná. Například pokud bychom místo přímky $FG$ zvolili za přímku $r$ přímku $EF$, byly by přímky $p$ a $r$ rovnoběžné.

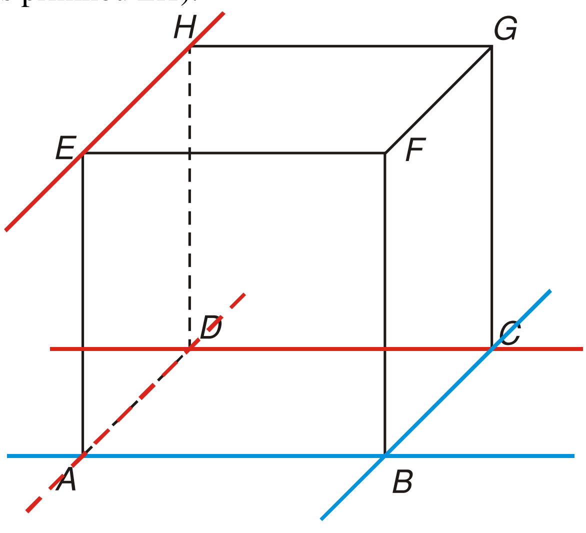



**Př. 4:** Rozhodni, které z dvojic přímek určených vrcholy standardní krychle jsou navzájem kolmé. Příklad řeš nejdříve bez obrázku, jen „v hlavě“.

a) $AB, BC$ b) $CD, EH$ c) $AB, EG$ d) $AD, CH$

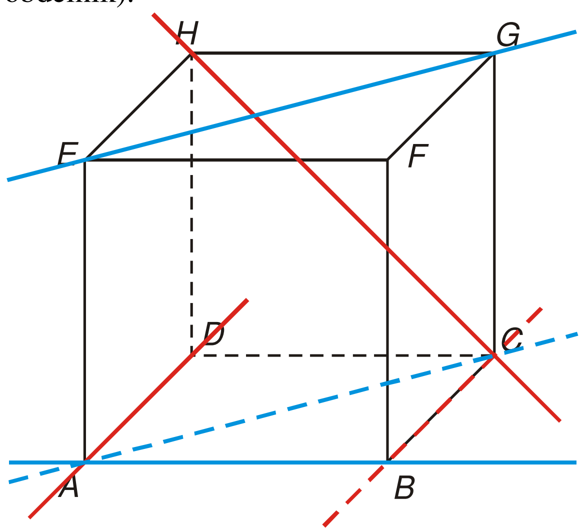
a) Přímky $AB, BC$ jsou kolmé (leží na nich strany čtverce).

b) Přímky $CD, EH$ jsou kolmé (přímka $AB$ je kolmá na přímku $AD$, která je rovnoběžná s přímkou $EH$).




c) Přímky $AB, EG$ nejsou kolmé ($AB$ není kolmá s přímkou $AC$, která je rovnoběžná s přímkou $EG$).

d) Přímky $AD, CH$ jsou kolmé ($HC$ je kolmá na přímku $BC$, čtyřúhelník $BCHE$ je obdélník).




Kdy je přímka kolmá k rovině?

**Přímka je kolmá k rovině, právě když je kolmá ke všem přímkám roviny.**

Píšeme:

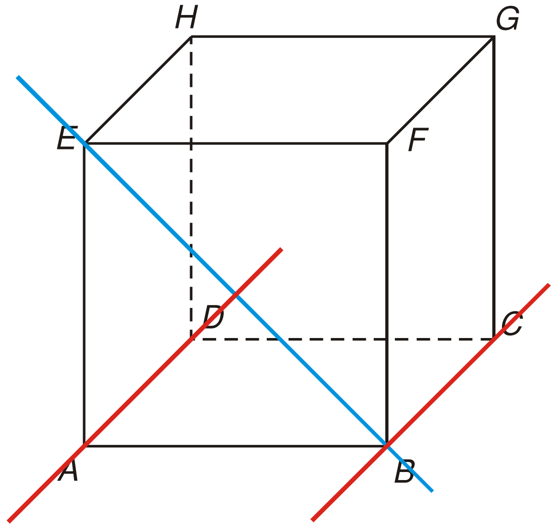
- $p \perp \rho$ - přímka $p$, je kolmá k rovině $\rho$ = přímka $p$ je kolmice k rovině $\rho$.

- $p \cap \rho = \{P\}$ = pata kolmice

Jak se přesvědčíme, že je rovina kolmá k přímce (zkoušet všechny přímky nemůžeme, je jich nekonečně mnoho)?
$\Rightarrow$ **kritérium kolmosti přímky a rovny:**
**Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá.**

**Př. 5:** U standardní krychle *ABCDEFGH* najdi příklad toho, že přímka nemusí být kolmá k rovině, když je kolmá ke dvěma rovnoběžným přímkám v rovině.

Možností je hodně, například přímka *EB* je kolmá k přímkám *AD* i *BC*, ale k rovině *ABC* kolmá není.



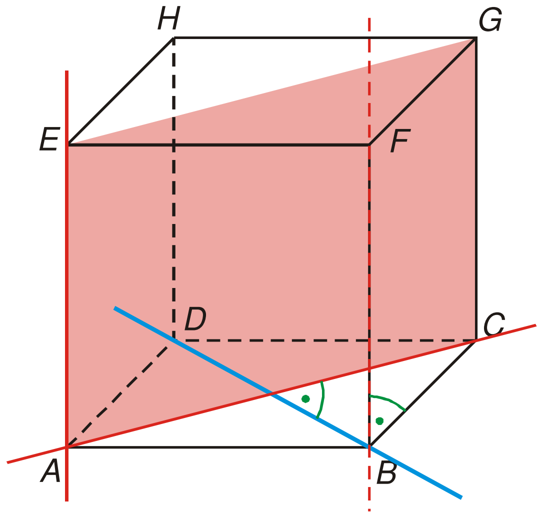

Proč nestačí kolmost na dvě rovnoběžky?
Přímka „obsahuje" jeden směr, rovina dva směry $\Rightarrow$ dvě rovnoběžky určují pouze jeden směr a nezaručují tedy, že přímka, která je na ně kolmá, je kolmá na celou rovinu. Dvě různoběžky určují dva různé směry a tedy všechny směry roviny.

**Př. 6:** Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Dokaž, že přímka *BD* je kolmá k rovině *ACE*.

Pokud má být přímka *BD* kolmá k rovině *ACE*, musí být kolmá ke dvěma různoběžkám, které v ní leží $\Rightarrow$ hledáme dvě takové přímky:

- *BD* je kolmá k přímce *AC* (úhlopříčky v podstavě)
- *BD* je kolmá k přímce *BF* (strany obdélníka *BFHD*), *BF* je rovnoběžná s *AE* $\Rightarrow$ *BD* je kolmá k *AE*

$\Rightarrow$ *BD* je kolmá ke dvěma různoběžkám v rovině *ACE* $\Rightarrow$ je kolmá k celé rovině *ACE* (a tím i ke každé přímce v ní).

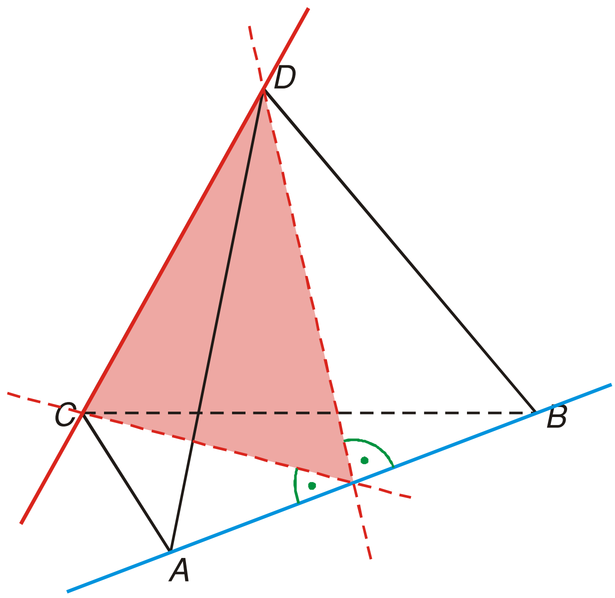



**Př. 7:** Je dán pravidelný čtyřstěn *ABCD*. Dokaž, že platí $AB \perp CD$.

Nejde nalézt přímý důkaz kolmosti $\Rightarrow$ zkusíme najít rovinu, která obsahuje přímku *CD* a je kolmá na *AB*.
Adept: rovina $CDS_{AB}$. Dokazujeme, že $CDS_{AB} \perp AB$:

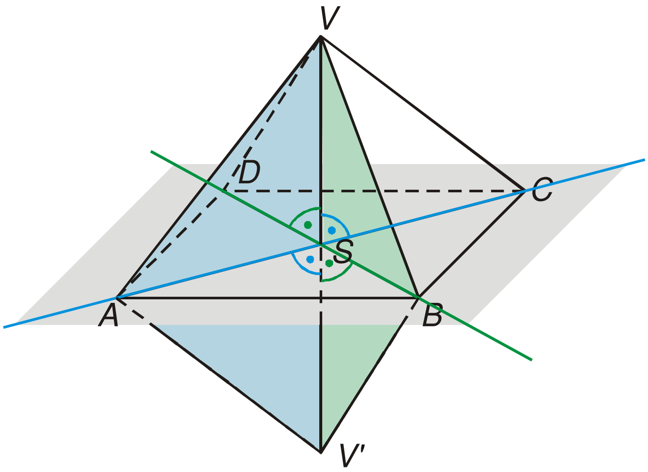
- přímka *AB* je kolmá na úsečku $CS_{AB}$ ($CS_{AB}$ je výška v rovnostranném trojúhelníku *ABC*),
- přímka *AB* je kolmá na úsečku $DS_{AB}$ ($DS_{AB}$ je výška v rovnostranném trojúhelníku *ABD*),

$\Rightarrow$ přímka *AB* je kolmá na rovinu $CDS_{AB}$ (je kolmá na dvě různoběžné přímky v této rovině $CS_{AB}$ a $DS_{AB}$) $\Rightarrow$ je tedy kolmá na všechny přímky v této rovině i na přímku *DC*.

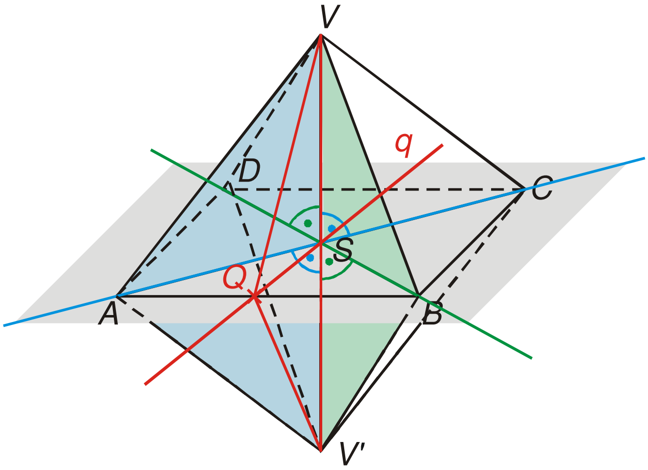



Se zájemci se vrátíme ke kritériu kolmosti přímky a roviny.

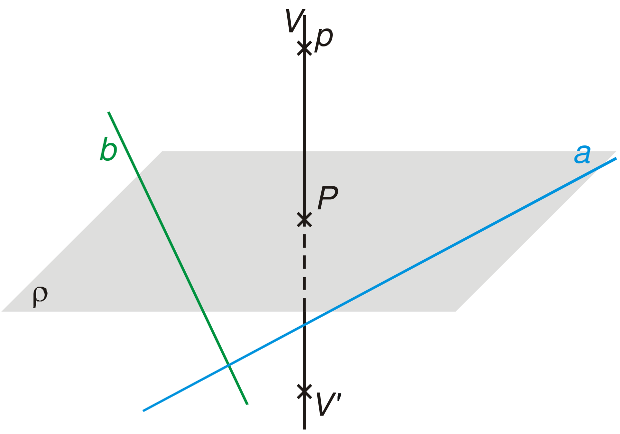
**Př. 8:** (BONUS) V klasické učebnici je kritérium kolmosti přímky a roviny dokazováno způsobem uvedeným níže. Zobecni důkaz pro přímku $p$ kolmou k přímkám $a$, $b$ v rovině $\rho$. Přímky $a$, $b$ nejsou navzájem kolmé a neprochází patou kolmice přímky $p$.



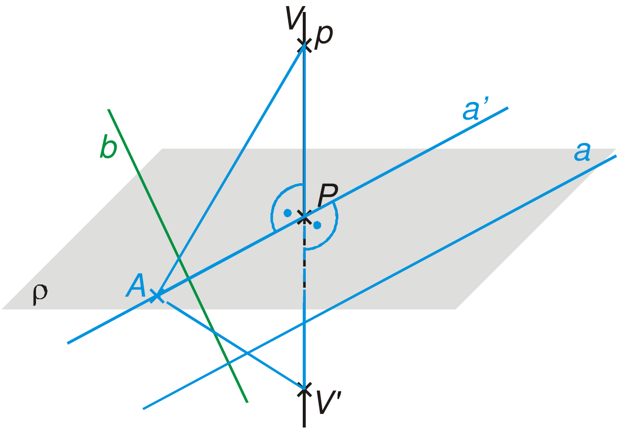

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Předpokládáme, že přímka $VS$ je kolmá k přímkám $AC$ a $BD$ roviny $ABC$ (vybarvená šedě). Na přímce $VS$ sestrojíme bod $V'$ tak, aby platilo $|VS| = |VS'|$ (vznikne tak jehlan $ABCDV'$ shodný s jehlanem $ABCDV$).
Trojúhelník $ASV$ (modrý) je shodný s trojúhelníkem $ASV'$ (věta $sss$).
Trojúhelník $BSV$ (zelený) je shodný s trojúhelníkem $BSV'$ (věta $sss$).



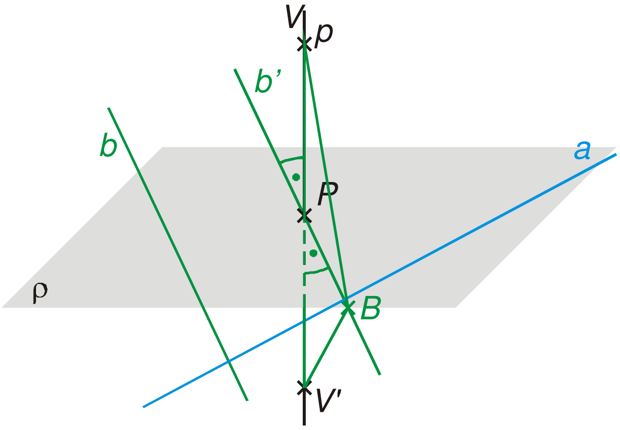

Nakreslíme si libovolnou přímku $q$ ležící v rovině $ABC$. Její průsečík s přímkou $AB$ označíme $Q$. Dokazujeme, že trojúhelníky $QSV$ a $QSV'$ jsou shodné. Víme: $|VS| = |VS'|$ $\Rightarrow$ potřebujeme $|QV| = |QV'|$. Trojúhelníky $QAV$ a $QAV'$ jsou shodné (věta $sus$) $\Rightarrow$ platí $|QV| = |QV'|$ $\Rightarrow$ $QSV$ a $QSV'$ jsou shodné (věta $sss$) $\Rightarrow$ úhly $QSV$ a $QSV'$ jsou shodné, dohromady se rovnají přímému úhlu $\Rightarrow$ jsou kolmé $\Rightarrow$ přímka $VS$ je kolmá na přímku $q$.



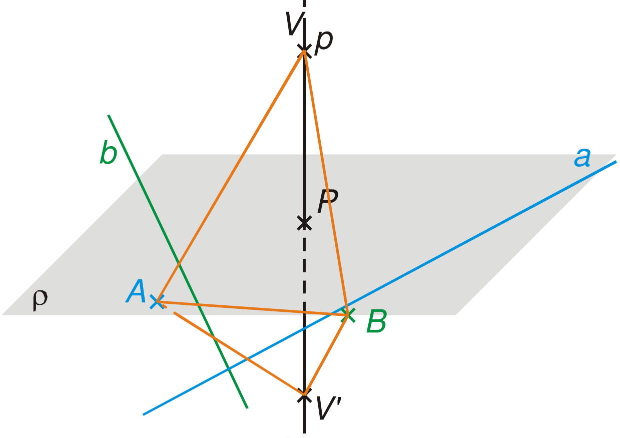

**Krok 1:**
Přímka $p$ je kolmá k přímkám $a$, $b$ v rovině $\rho$. Přímky $a$, $b$ nejsou navzájem kolmé a neprochází patou kolmice přímky $p$.
Vyznačíme průsečík $P$ přímky $p$ s rovinou $\rho$.
Na přímce $p$ zvolíme bod $V$.
Na přímce $p$ zvolíme bod $V'$ tak, aby platilo $|VP| = |VP'|$.



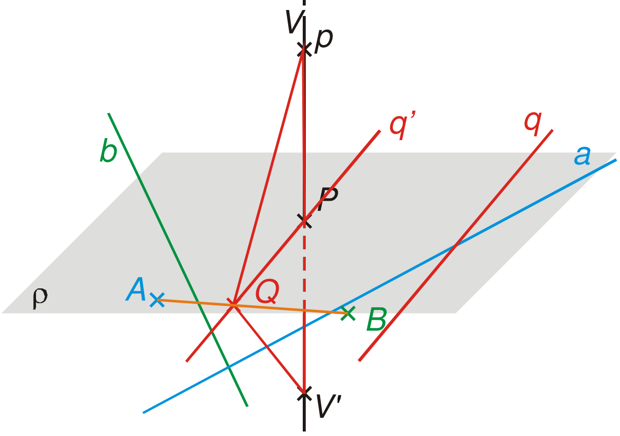

**Krok 2:**
Bodem $P$ vedeme rovnoběžku $a'$ s přímkou $a$, na které zvolíme libovolný bod $A$ různý od $P$.
Trojúhelníky $APV$ a $APV'$ jsou shodné podle věty *sus* (společná strana $AP$, úhly $APV$ a $APV'$, strany $PV$ a $PV'$).



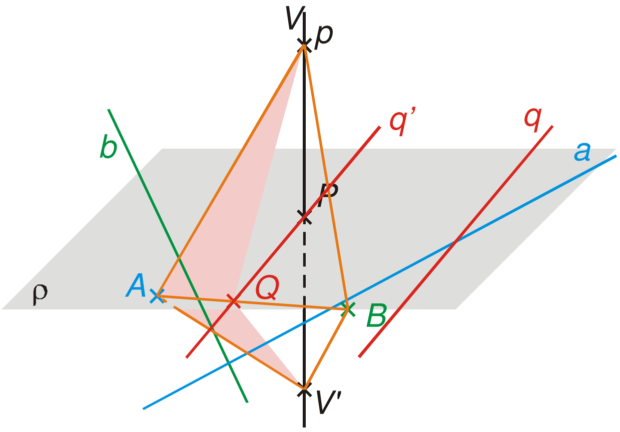

**Krok 3:**
Bodem $P$ vedeme rovnoběžku $b'$ s přímkou $b$, na které zvolíme libovolný bod $B$ různý od $P$.
Trojúhelníky $APV$ a $APV'$ jsou shodné podle věty *sus* (společná strana $AP$, úhly $APV$ a $APV'$, strany $PV$ a $PV'$).



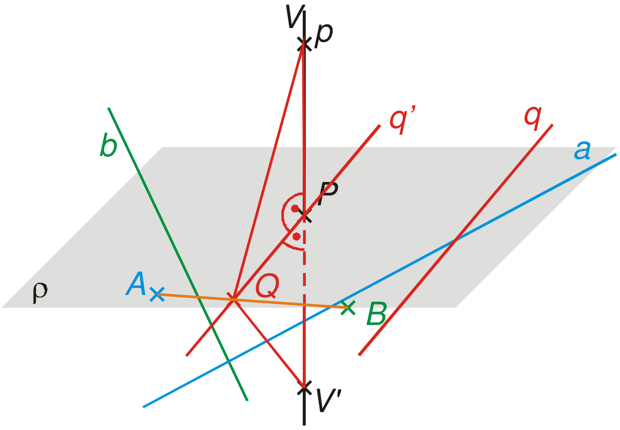

**Krok 4:**
V předchozích krocích jsme dokázali, že trojúhelníky $ABV$ a $ABV'$ jsou shodné podle věty *sss* (společná strana $AB$, shodná dvojice stran $AV$, $AV'$ a shodná dvojice stran $BV$, $BV'$).




**Krok 5:**
S libovolnou přímkou $q$ roviny $ABC$ (u které chceme dokázat její kolmost k přímce $p$) sestrojíme rovnoběžku bodem $P$. Její průsečík s úsečkou $AB$ označíme $Q$.
Potřebujeme dokázat shodnost trojúhelníků $QPV$ a $QPV'$. Víme, že se shodují dvě dvojice stran: společná strana $QP$ a strany $PV$ a $PV'$ $\Rightarrow$ dokazujeme shodnost stran $QV$ a $QV'$.




**Krok 6:**
Trojúhelníky $AQV$ a $AQV'$ jsou shodné podle věty *sus*: společná strana $AQ$, shodné úhly $QAV$ a $QAV'$ (ve shodných trojúhelnících viz. krok 4), shodné strany $AV$, $AV'$ $\Rightarrow$ strana $QV$ je shodná se stranou $QV'$.




**Krok 7:**
Trojúhelníky $QPV$ a $QPV'$ jsou shodné podle věty *sss* $\Rightarrow$ úhly $QPV$ a $QPV'$ jsou shodné, jejich součet je úhel pravý $\Rightarrow$ oba jsou kolmé $\Rightarrow$ přímka $q'$ je kolmá k přímce $p$ $\Rightarrow$ přímka $q$ je kolmá k přímce $p$.

Pokud by byla přímka $q'$ rovnoběžná s přímkou $AB$, stačí zvolit jeden z bodů $A$, $B$ jinak. Postup důkazu se nemění.

**Shrnutí:**